Die folgenden Seiten beinhalten ein Manuskript, das bei der Zeitschrift „Naturwissenschaften im Unterricht Physik“ eingereicht wurde. Die in der Zeitschrift veröffentlichte Version weicht vom Manuskript ab.

Die exakte Quellenangabe des publizierten Artikels ist:

WILHELM, T.; BARTH, M.

Elementarisierungen in der Kinematik

Naturwissenschaften im Unterricht Physik 32, Heft 181, 2021, S. 6 - 9

Thomas Wilhelm, Michael Barth

Elementarisierungen in der Kinematik

Für die Schule muss immer elementarisiert, also auch vereinfacht werden. Dabei ist es durchaus strittig, wie stark man vereinfachen kann und wann es noch fachgerecht ist. Um sich klar zu sein, was man vereinfacht, hier ein fachlicher Blick aus Sicht der Hochschulphysik.

Die Grundideen der Kinematik aus Hochschulsicht

Die Kinematik beschreibt die Bewegung eines Körpers mit Hilfe der Größen Zeit, Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung. Dabei geht es ausschließlich darum, *wie* sich ein Körper bewegt, nicht *warum* er sich bewegt oder *warum* sich die Bewegung ändert.

Um die Bewegung eines Punktes beschreiben zu können, muss man zu bestimmten Zeiten angeben, wo sich der Punkt befindet. Dazu ist ein Bezugssystem nötig, d.h. man braucht einen Bezugspunkt und ein Koordinatensystem, das man prinzipiell beliebig legen kann. Mit seiner Hilfe gibt man dann einen Ortsvektor $\vec{r}$ an. Bei geradlinigen Bewegungen legt man eine Koordinatenachse am besten in oder gegen die Bewegungsrichtung, so dass man mit einer Koordinate auskommt. Bei mehrdimensionalen Bewegungen werden meist zueinander senkrechte Achsen gewählt. Zur Beschreibung der Position eines Körpers auf der Erde, kennen die Schülerinnen und Schüler evtl. schon zwei Bezugssysteme: Man kann den Ort mit Breitengrad, Längengrad und Höhe angeben oder mit GPS-Koordinaten.

Will man eine Bewegung möglichst genau beschreiben, dann müssen nicht nur der Ort $\vec{r}$ des Körpers und der Zeitpunkt der Messung möglichst genau ermittelt werden. Zusätzlich müssen die Zeitpunkte nah zusammenliegen, d.h. man muss möglichst oft messen.

Die Ortsänderung in einem Zeitintervall Δt wird auch Ortsverschiebung genannt. Sie hat als Vektordifferenz $\vec{r_2} - \vec{r_1}$ Länge und Richtung. Dividiert man die Ortsänderung $\Delta\vec{r}$ in einem Zeitintervall Δt durch das Zeitintervall Δt, erhält man die mittlere Geschwindigkeit in diesem Zeitintervall: $\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ bzw. im eindimensionalen Fall $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Die Geschwindigkeit ist ein Vektor, wobei im eindimensionalen Fall eine Angabe von Betrag und Vorzeichen ausreicht. Die Momentangeschwindigkeit ergibt sich als Ableitung des Ortsvektors nach der Zeit. Der Betrag der Geschwindigkeit, auch Tempo oder Schnelligkeit genannt, gibt an, wie schnell sich ein Körper bewegt, anschaulich wäre dies die Angabe eines Tachometers. Die Richtung der Geschwindigkeit gibt die momentane Bewegungsrichtung an. Umgekehrt kann aus der bekannten Geschwindigkeit auch wieder die Ortsänderung berechnet werden; bei eindimensionalen Bewegungen gilt immer $\Delta x = v_{mittel} \cdot \Delta t$.

Dividiert man die Geschwindigkeitsänderung $\Delta\vec{v}$ in einem Zeitintervall Δt durch das Zeitintervall Δt, erhält man die mittlere Beschleunigung $\vec{a}$ in diesem Zeitintervall (siehe Abb. 1). Die Momentanbeschleunigung ergibt sich als Ableitung des Geschwindigkeitsvektors nach der Zeit. Der tangentiale Anteil der Beschleunigung gibt an, wie stark sich das Tempo ändert, der radiale Anteil gibt an, wie stark sich die Richtung ändert. Weist der tangentiale Anteil in die Bewegungsrichtung, wird der Körper schneller; zeigt er gegen die Bewegungsrichtung, wird der Körper langsamer. Für eindimensionale Bewegungen folgt daraus: Haben Geschwindigkeit und Beschleunigung das gleiche Vorzeichen, wird der Körper schneller; haben sie verschiedene Vorzeichen, wird der Körper langsamer.

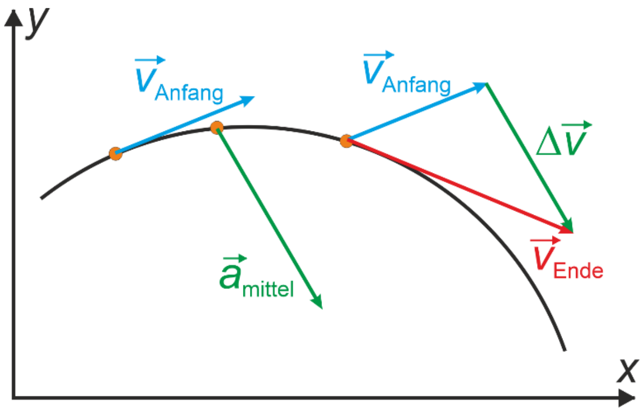

Abb. 1: Die (mittlere) Beschleunigung in einem Zeitintervall ergibt sich aus der Geschwindigkeitsänderung.

Die Betrachtung von beschleunigten Bewegungen – also von Bewegungen, bei denen sich die Geschwindigkeit irgendwie ändert – sind sehr wichtig im Hinblick auf die Dynamik. Darüber wird festgelegt, was eine Kraft ist bzw. der Zusammenhang zwischen Kraft und Bewegung betrachtet.

Die Größe Beschleunigung ist für Schülerinnen und Schüler eine sehr abstrakte und schwierige Größe. In der Regel – zumindest in der Sekundarstufe I – genügt es aber, die Geschwindigkeitsänderung $\Delta\vec{v}$ in einem Zeitintervall Δt zu betrachten. Es ist nicht unbedingt nötig, $\Delta\vec{v}$ und Δt zu einer neuen Größe zu verschmelzen. Anschaulich gibt die Beschleunigung an, wie schnell sich die Geschwindigkeit ändert. Bei eindimensionalen Bewegungen gibt der Betrag an, wieviel m/s der Geschwindigkeitsbetrag **pro s** zu- oder abnimmt: Daher die Einheit $\frac{m/s}{s} = \frac{m}{s^2}$.

Früher wurde selbst in der Schule noch die Änderung der Beschleunigung pro Zeitintervall angeschaut und diese „Ruck“ genannt. Das ist nicht mehr üblich. In praktischen Fällen ist diese aber sehr wichtig. So muss bei Fahrgeschäften auf dem Jahrmarkt sichergestellt sein, dass der Ruck nirgends zu groß ist.

Die angegebenen Quotienten bzw. Änderungsraten ergeben nur die Durchschnittswerte in den Zeitintervallen. Um Momentanwerte zu bekommen, müssen Ableitungen gebildet werden.

Diese sind aber noch nicht bekannt, wenn die Kinematik behandelt wird. Für praktische Messung genügt es zu wissen, dass das Messzeitintervall sehr klein sein muss. Für Berechnungen ist die Kenntnis von Ableitungen und Integration nötig, sobald es über idealisierte Situationen hinausgeht. Diese können heute jedoch auch numerisch vom Computer durchgeführt werden. Die Verwendung numerischer Verfahren wird deshalb auch in manchen Lehrplänen vorgeschrieben oder empfohlen.

Elementarisierungen

Falls der Begriff Weglänge in der Hochschule verwendet wird, ist damit die Länge der zurückgelegten Bahnkurve gemeint – eine stets positive Zahl, die sich bei jeder Bewegung vergrößert. Mit dieser Größe lassen sich aber Bewegungen nicht vollständig beschreiben, wie die Ausführungen oben zeigen, sondern nur mit den vektoriellen Größen. Im Folgenden werden drei Elementarisierungen vorgestellt, die in der Praxis jedoch oft vermischt werden, auch in Schulbüchern

Vereinfachung „Beträge“

Eine starke Vereinfachung ist die Beschränkung auf Beträge. Der Weg *s* ist demnach der positive Abstand von einem Startpunkt, wobei keine Bewegungen mit Richtungsumkehr behandelt werden. Die zeitliche Änderung des Weges wird Geschwindigkeit genannt, obwohl es nur der Geschwindigkeitsbetrag bzw. das Tempo ist. Beschleunigung wird dann als Änderung dieses Geschwindigkeitsbetrages eingeführt, so dass Schnellerwerden eine positive und Langsamerwerden eine negative Beschleunigung ergibt. Die Wahl des Koordinatensystems spielt dabei keine Rolle. Dies findet sich vor allem im Anfangsunterricht und in der Sekundarstufe I und führt dazu, dass alle Größen nicht als gerichtete Größen aufgefasst werden. Bei Bewegungen mit Richtungsänderungen führt dies zu falschen Schlussfolgerungen (siehe Kasten 1 und 2).

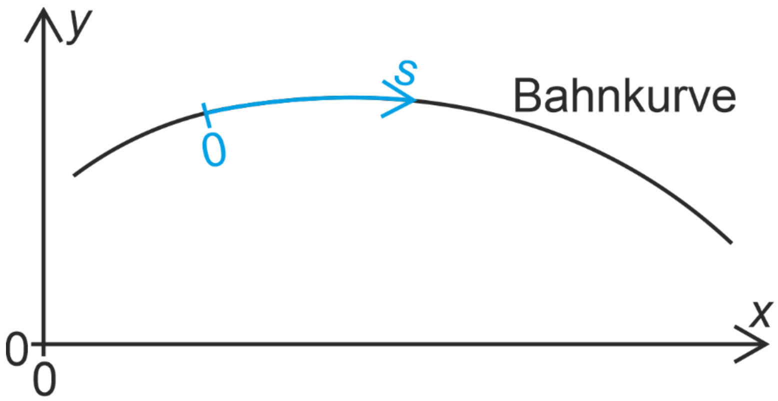

Abb. 2: Eine Elementarisierung macht aus einer mehrdimensionalen Bewegung eine eindimensionale Bewegung, der Pfeil soll angeben, in welche Richtung positiv gemessen wird, ist also kein Hinweis auf einen Vektor.

Vereinfachung „Eindimensionale Bewegung“

Eine geringere Vereinfachung ist eine stets eindimensionale Betrachtung. Der Weg wird als der Abstand von einem Startpunkt auf einer Bahnkurve verstanden, so dass diese Zahl positiv und negativ sein kann, aber auf jeden Fall eine Zahl (ein Skalar) ist (siehe Abb. 2). Im Falle geradliniger eindimensionaler Bewegungen entspricht das der x-Komponente des Ortes. Die zeitliche Änderung dieses Weges wird Geschwindigkeit genannt. Es ist eine Zahl (ein Skalar), wobei das Vorzeichen angibt, ob die Bewegung auf der Bahnkurve in oder gegen die Koordinatenachse weist. Beschleunigung wird dann als Änderung dieser Geschwindigkeit eingeführt. Sie ist auch ein Skalar, wobei das Vorzeichen angibt, ob die Beschleunigung auf der Bahnkurve in oder gegen die Koordinatenachse weist. Der so definierte Weg ist das, was ein fiktiver Kilometerzähler anzeigt, der auch rückwärts laufen kann, den Betrag der Geschwindigkeit würde ein Tachometer anzeigen. Für eindimensionale Bewegungen ist das fachlich korrekt, die Geschwindigkeit ist dann die x-Komponente des eigentlichen Geschwindigkeitsvektors und die Beschleunigung die x-Komponente des eigentlichen Beschleunigungsvektors. Bei mehrdimensionalen Bewegungen erhält man auf diese Weise aber nur die tangentiale Beschleunigungskomponente und die radiale Beschleunigungskomponente wird nicht berücksichtigt (siehe Kasten 2). Nur wenn die Bahnkurve eine Gerade ist, treten diese Unvollständigkeiten nicht auf.

Situation 1: Eine Person läuft in 8 s geradeaus 12 m weit und in den folgenden 4 s wieder 6 m zurück. Berechne den zurückgelegten Weg und die durchschnittliche Geschwindigkeit.

Hochschule: Es wird ein Weg von s = 18 m zurückgelegt, aber die Ortsänderung beträgt nur Δx = 6 m. Die durchschnittliche Geschwindigkeit beträgt demnach $v = \Delta x/\Delta t$ = 6 m / 12 s = 0,5 m/s.

Beschränkung auf Beträge: Es wird ein Weg von s = 18 m zurückgelegt. Die durchschnittliche Geschwindigkeit beträgt demnach $v = \Delta x/\Delta t$ = 18 m / 12 s = 1,5 m/s.

Eindimensionale Betrachtung: Es wird ein Weg von s = 6 m zurückgelegt. Die durchschnittliche Geschwindigkeit beträgt demnach $v = \Delta x/\Delta t$ = 6 m / 12 s = 0,5 m/s.

Wiesner’scher Ansatz: Es wird ein Weg von s = 18 m zurückgelegt. Das Tempo beträgt demnach $v = \Delta x/\Delta t$ = 18 m / 12 s = 1,5 m/s.

Kasten 1: Unterschiedliche Elementarisierungen führen manchmal zu unterschiedlichen Ergebnissen bei „Weg“ und „Geschwindigkeit“.

Situation 2: Ein Körper bewegt sich auf einer Kreislinie mit einem Radius von 2 m und wird dabei gleichmäßig schneller. Er startet aus der Ruhe. Nach 4 s hat er eine Umdrehung geschafft und bewegt sich mit 4 m/s. Berechne die momentane Beschleunigung bei der halben Umdrehung.

Hochschule: Die tangentiale Beschleunigungskomponente berechnet sich zu $a_{tang} = \Delta|v|/\Delta t$ = 4 m/s / 4 s = 1 m/s². Die radiale Beschleunigungskomponente bei v = 2 m/s berechnet sich zu a_{rad} = (2 m/s)² / 2 m = 2 m/s². Der Betrag der Beschleunigung ist $a = \sqrt{a_{tang}{}^2 + a_{rad}{}^2}$ = 2,2 m/s².

Beschränkung auf Beträge: Die Beschleunigung ist $a = \Delta v/\Delta t$ = 4 m/s / 4 s = 1 m/s².

Eindimensionale Betrachtung: Die Beschleunigung ist $a = \Delta v/\Delta t$ = 4 m/s / 4 s = 1 m/s².

Kasten 2: Manche Elementarisierungen führen bei Bewegungen mit Richtungsänderungen zu unvollständigen Ergebnissen bei der Beschleunigung.

Vereinfachung „Zweidimensionale Bewegung"

Bekannt ist auch der Wiesner'sche Ansatz für die Sek. I [1]: Der Ort ist hier ein Punkt. Die Geschwindigkeit wird aber nicht als Ortsverschiebung pro Zeitintervall eingeführt, sondern es wird erst das Tempo als zurückgelegter Weg pro benötigte Zeit eingeführt und die Geschwindigkeit dann als Kombination aus Tempo und Bewegungsrichtung. Die vektorielle Geschwindigkeitsänderung in einem Zeitintervall wird Zusatzgeschwindigkeit genannt und die Beschleunigung wird nicht eingeführt. Dieser Ansatz wird im Artikel Spatz/Wilhelm beschrieben

Weitere, andere Elementarisierungen für die Oberstufe gibt es von Wilhelm [2] und von Amenda [3], sie liegen näher bei der Hochschulsicht.

Empfehlungen aus der didaktischen Forschung

Kinematische Betrachtungen werden insbesondere in der Klasse 10 bzw. 11 vor allem an eindimensionalen Bewegungen bzw. bei einzelnen Komponenten einer Bewegung betrachtet. Hier ist es möglich, die Bewegung durch Zeit-Graphen darzustellen und Bewegungen zu berechnen. Des Weiteren kann hier schon die Ableitung vorbereitet werden und Änderungsratenbetrachtet werden. Dabei kommt es nicht auf mathematische Strenge an, diese wird später im Mathematikunterricht nachgeliefert, sondern um die physikalisch motivierte Erarbeitung des Grenzwertbegriffes für einfache Fälle, dadurch wird eine auch später wesentliche Methode der Physik vorbereitet und ist dann problemlos erweiterbar, nachdem die Analysis Thema im Mathematikunterricht war.

Dabei ist es aber wichtig, dass die kinematischen Größen nicht gemäß der oben erwähnten starken Vereinfachung auf Beträge reduziert werden. Das Vorzeichen des Ortes bei eindimensionalen Bewegungen gibt an, auf welcher Seite des Nullpunktes man sich auf der Koordinatenachse befindet. Das Vorzeichen von Geschwindigkeit und Beschleunigung gibt an, ob die Größen in oder gegen die gewählte Koordinatenachse gerichtet ist.

Früher wurden zweidimensionale Bewegungen erst spät im Unterrichtsgang behandelt. Heute wird empfohlen, die kinematischen Größen zuerst qualitativ an zweidimensionalen Bewegungen einzuführen, bevor man an eindimensionalen Bewegungen quantitative Betrachtungen anstellt. Dabei soll deutlich werden, dass jede Änderung der Geschwindigkeit, ob Tempo oder Richtung, eine beschleunigte Bewegung ist. Davon profitiert man dann in der Dynamik und bei der Kreisbewegung, weil den Schülerinnen und Schülern dann eher klar ist, dass eine Richtungsänderung eine Beschleunigung ist, zu der eine Kraft erforderlich ist.

Als Ergebnis der GDCP-Schwerpunkttagung „Newton'sche Mechanik" (2016) wurde ein Thesenpapier erstellt und dieses konsensuell verabschiedet [5]. Der Absatz zur Kinematik wird im Kasten 3 wörtlich wiedergegeben, da es sich hier nicht um eine Einzelmeinung, sondern um gemeinsam getragene Forderungen handelt, die sowohl die Sekundarstufe I als auch II betreffen. Eine ausführliche Diskussion aller Aussagen würde hier den Platz sprengen. Angemerkt sei, dass sich die Thesen nicht dagegen aussprechen, nach der Einführung der kinematischen Größen anhand zweidimensionaler Bewegungen auch geradlinige Bewegungen mit konstanter Beschleunigung und die entsprechenden Gleichungen zu behandeln und den Ableitungsbegriff vorzubereiten. Man sollte im Unterricht dabei nur sehr deutlich machen, dass und warum es sich um starke Vereinfachungen handelt, was erfahrungsgemäß bei den Lernenden nicht sicher im Gedächtnis bleibt. Und $s = ½\, a\, t^2$ ist nun einmal nicht die Essenz der Kinematik.

Eine Aussage sei dennoch beispielhaft diskutiert [6]. Die Definitionsgleichung für die Durchschnittsgeschwindigkeit einer geradlinigen Bewegung in einem Zeitintervall Δt ergibt umgeformt $\Delta x = v_{mittel} \cdot \Delta t$, so dass diese Gleichung allgemeingültig ist. Bei gleichmäßig beschleunigten Bewegungen erhält man v_{mittel} als Mittelwert der Anfangs- und der Endgeschwindigkeit in dem Zeitintervall und bei Beschleunigung aus der Ruhe heraus als $v_{mittel} = ½\, v_{Ende}$. Die Gleichung $s = ½\, a\, t^2$ gilt dagegen ausschließlich für den Spezialfall geradliniger Bewegung mit konstanter Beschleunigung und Start bei $t = 0$ am Startpunkt ohne Anfangsgeschwindigkeit.

Für Lehrkräfte gibt es bereits Unterrichtsmaterialien, die diese Thesen umsetzen. Für die Sekundarstufe I wären das zwei Handbücher [1 + 7], für die Sekundarstufe II gibt es ein Skript von Amenda [8]. Die Ideen, das Vorgehen und die empirischen Befunde verschiedener Unterrichtskonzeptionen werden in [9] ausführlich dargelegt.

Der in der Regel unscharf und missverständlich verwendete Begriff „Weg" sollte im Sinne einer konsistenten Darstellung der Kinematik durch die präziseren Begriffe „Ort" und „Ortsverschiebung" (als Grundlage der Geschwindigkeitsdefinition) ersetzt werden. Kinematische Größen sollten ausgehend vom Ort anhand zweidimensionaler Bewegungen eingeführt werden. Zwischen Geschwindigkeit und Geschwindigkeitsbetrag (Tempo) muss im Unterricht klar unterschieden werden. Dabei sollte man sich von manchem historisch Bedingtem trennen, wie der Betonung der Momentangeschwindigkeit, der speziellen Gleichung $s = ½\, a\, t^2$ (anstelle von $\Delta x = v_{mittel} \cdot \Delta t$) und der ausschließlichen Messung von Zeit und Ort trotz neuer Messtechnik (anstelle der direkten Messung von Geschwindigkeit und Beschleunigung). In der Sekundarstufe

2 sollte das in der Sekundarstufe 1 erarbeitete qualitative Verständnis der kinematischen und dynamischen Größen mit mathematischen Formalisierungen verknüpft werden.

Kasten 3: Thesen zur Kinematik (aus [5])

Literatur

[1] Wiesner, H.; Wilhelm, T.; Waltner, C; Tobias, V.; Rachel, A.; Hopf, M.: Kraft und Geschwindigkeitsänderung. Neuer fachdidaktischer Zugang zur Mechanik (Sek. 1), Hallbergmoos: Aulis-Verlag, 2016

[2] Wilhelm, T.: Konzeption und Evaluation eines Kinematik/Dynamik-Lehrgangs zur Veränderung von Schülervorstellungen mit Hilfe dynamisch ikonischer Repräsentationen und graphischer Modellbildung, Studien zum Physik- und Chemielernen, Band 46, Berlin: Logos-Verlag, 2005, https://opus.bibliothek.uni-wuerzburg.de/frontdoor/index/index/docId/3310

[3] Amenda, T.: Bedeutung fachlicher Elementarisierungen für das Verständnis der Kinematik), Studien zum Physik- und Chemielernen, Band 230, Logos-Verlag, Berlin, 2017

[4] Wilhelm, T.; Hopf, M.: Bericht von der Schwerpunkttagung „Newton'sche Mechanik“ mit Thesen zur Mechanik. In: Maurer, Chr. (Hrsg.): Implementation fachdidaktischer Innovation im Spiegel von Forschung und Praxis, Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik, Jahrestagung in Zürich 2016, Band 37, 2017, S. 42 - 46, https://gdcp-ev.de/wp-content/tagungsbaende/GDCP_Band37.pdf

[5] Wilhelm, T.; Hopf, M.: Thesen zum Mechanikunterricht. In: MNUjournal 71, Nr. 5, 2018, S. 345 – 347

[6] Wilhelm, T.: $s = \frac{1}{2}\, a\, t^2$? In: Wilhelm, T. (Hrsg.): Stolpersteine überwinden im Physikunterricht. Anregungen für fachgerechte Elementarisierungen, Seelze: Aulis/Friedrich, 2018, S. 23 - 23

[7] Wilhelm, T.; Wiesner, H.; Hopf, M.; Rachel, A.: Mechanik II: Dynamik, Erhaltungssätze, Kinematik, Reihe Unterricht Physik, Band 6, Hallbergmoos: Aulis-Verlag, 2013

[8] Amenda, T.: https://www.elementederkinematik.de/careers, 2020

[9] Wilhelm, T.; Hopf, M.; Schecker, H. (Hrsg.): Unterrichtskonzeptionen für den Physikunterricht, Berlin: Springer, 2021 (in Druck)